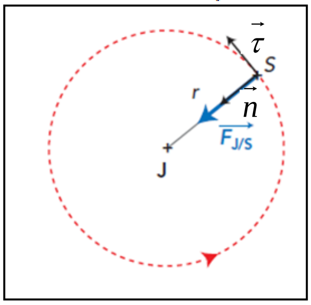
Correction des exercices n°22-25-29 p176-181

Exercice n°22 p174

1a. La force de gravitation exercée par Jupiter de masse M sur le satellite de masse m est : $\overrightarrow{F_{J/S}} = G \cdot \dfrac{m \cdot M}{r^2} \cdot \vec{n}$



b. Schématisation de la force $\overrightarrow{F_{J/S}}$:

2. On étudie le système « satellite » réduit à son centre d'inertie dans un référentiel jupitocentrique.
La force extérieure s'exerçant sur le satellite est la force $\overrightarrow{F_{J/S}}$ de gravitation exercée par Jupiter.

L'application de la deuxième loi de Newton conduit à : $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_{J/S}} = m\vec{a}$

Ainsi : $\vec{a} = \dfrac{\overrightarrow{F_{J/S}}}{m} = \dfrac{\frac{GMm}{r^2}\vec{n}}{m} = \dfrac{GM}{r^2}\vec{n}$

Par ailleurs, l'accélération a pour expression : $\vec{a} = a_n.\vec{n} + a_\tau.\vec{\tau} = \dfrac{v^2}{r}.\vec{n} + \dfrac{dv}{dt}.\vec{\tau}$

Par indentification, on obtient les composantes du vecteur accélération dans la base de Frenet

$$\vec{a}\begin{cases} a_n = \dfrac{GM}{r^2} \\ a_\tau = 0 \end{cases}$$

Ainsi : $a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = 0$ par conséquent la valeur de la vitesse est constante.

De plus, $a_n = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{GM}{r^2}$; la vitesse a alors pour valeur : $v = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$

3. La valeur de la vitesse du satellite est indépendante de sa masse et elle est d'autant plus grande que le rayon de l'orbite est petit. Le satellite le plus rapide est celui qui est le plus proche de Jupiter.

4. La période de révolution est la durée mise par le satellite pour décrire sa trajectoire circulaire à la vitesse de valeur v constante : $T = \dfrac{2\pi r}{v}$

$$2\pi r = v \cdot T$$

soit : $T = \dfrac{2\pi \cdot r}{v} = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{G \cdot M}}$

5a. La représentation graphique proposée est une droite passant par l'origine, donc le carré de la période est proportionnel au cube de la distance entre les centres, soit $T^2 = k \cdot r^3$, k étant le coefficient directeur de la droite.

On retrouve la troisième loi de Kepler dans le cas d'un mouvement circulaire : $\dfrac{T^2}{r^3} = c^{te}$

b. Le résultat de la question 4 permet d'écrire : $\dfrac{T^2}{4\pi^2} = \dfrac{r^3}{G \cdot M}$ ou $T^2 = 4\pi^2\dfrac{r^3}{G \cdot M}$

En comparant avec le résultat de la question 5a, il vient :

$$k = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$$

soit : $$M = \frac{4\pi^2}{G \cdot k}$$

$$M = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 3{,}1 \times 10^{-16}}$$

$$M = 1{,}9 \times 10^{27} \text{ kg.}$$

Exercice n°25 p178 (voir livre)

Exercice n°29 p178

1a. Tout corps à la surface de Mars subit une force d'attraction gravitationnelle crée par cette planète qui a pour expression :

$F_{\text{Mars/système}} = \dfrac{G.M_{Mars}.m_{système}}{R_M^{\ 2}}$ (La distance entre le centre de Mars et le système est égale au rayon de Mars)

Cette force représente aussi le poids du système considéré sur Mars : P = $m.g_M$

Par conséquent : $m_{système}.g_M = \dfrac{G.M_{Mars}.m_{système}}{R_M^{\ 2}} \Leftrightarrow g_M = \dfrac{G.M_{Mars}}{R_M^{\ 2}}$

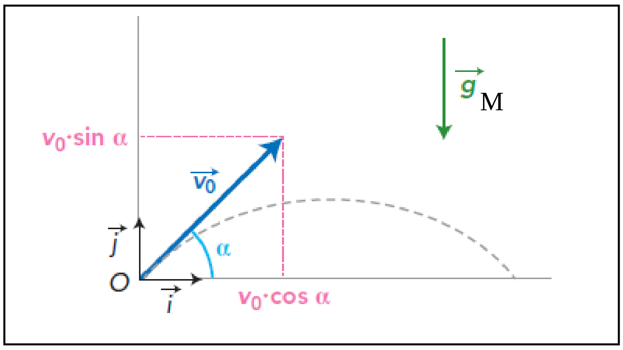
Par ailleurs : $M_{Terre} = 10 \times M_{Mars}$, donc :

$$g_M = \frac{G.M_{Terre}}{10.R_M^{\ 2}}$$

b. $g_M = \dfrac{6{,}67.10^{-11} \times 6{,}0.10^{24}}{10 \times (6{,}4.10^6)^2} = 3{,}5 m.s^{-2}$

Or : $g_T = \dfrac{G.M_{Terre}}{R_T^{\ 2}} = \dfrac{6{,}67.10^{-11} \times 6{,}0.10^{24}}{(6{,}4.10^6)^2} = 9{,}8 m.s^{-2}$

Par conséquent : $\dfrac{g_T}{g_M} = \dfrac{9{,}8}{3{,}5} = 2{,}8 \approx 3$



2a. Voir démonstration du cours :

D'après la 2eme loi de Newton, on a :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{M/Spationaute} = \vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m.\vec{v})}{dt} = m.\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \vec{P} = m.\vec{a} \Leftrightarrow m.\vec{g} = m.\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

En projetant l'expression vectorielle de $\vec{a}$ dans la base $O;\vec{i};\vec{j}$, on obtient les composante du vecteur accélération.

$$\vec{a} \quad \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -g \end{cases}$$

Par intégration, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse.

$$\vec{v} \quad \begin{cases} v_x = A \\ v_y = -gt + B \end{cases}$$ où A et B sont des constantes d'intégration

A t = 0, les expressions des composantes de $\vec{v}$ sont : $\vec{v}(0) \quad \begin{cases} v_x(0) = v_{0x} = A \\ v_y(0) = v_{0y} = -g \times 0 + B = B \end{cases}$

D'après les conditions initiales de la vitesse à t=0 , on obtient :

$A = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$

$B = v_{0y} = v_0 \sin\alpha$

De ce fait, le vecteur vitesse du spationaute est donné par : $\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0.\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0.\sin\alpha \end{cases}$

Sachant que $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, où le vecteur $\overrightarrow{OG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système d'équations donnant les coordonnées du vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v}\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0.\sin\alpha \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = -gt + v_0.\cos\alpha \end{cases}$

Par intégration, on obtient les trois coordonnées du vecteur position.

$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_{0x} \times t + C \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_{0y} \times t + D \end{cases}$ où C et D sont des constantes d'intégration

D'après les conditions initiales de la position à t=0

il vient : $\begin{cases} x(0) = 0 = v_{0x} \times 0 + C = C \\ y(0) = 0 = -\dfrac{1}{2}g \times 0^2 + v_{0y} \times 0 + D = D \end{cases}$

Ce qui donne les constantes d'intégration C=D=0

Les coordonnées du vecteur position s'écrivent finalement :

$x(t) = v_{0x} \times t = v_0 \times \cos\alpha \times t$

$y(t) = -\dfrac{1}{2}g_M \times t^2 + v_{0y} \times t = -\dfrac{1}{2}g_M \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t$

2b. L'équation horaire $x = v_{0x} \times t$ conduit à écrire $t = \dfrac{x}{v_{0x}}$

On substitue l'expression de t dans l'équation horaire de y(t), il vient :

$$y = -\frac{1}{2}g_M\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 + v_{0y}\frac{x}{v_{0x}} = -\frac{1}{2}g_M\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\sin\alpha\frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

L'équation cartésienne de la trajectoire est donc : $\boxed{y = -\dfrac{g_M}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x}$

3a. Par analogie, sur Terre : $\boxed{y = -\dfrac{g_T}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x}$

b. La longueur du saut est l'abscisse non nulle pour laquelle y(x) s'annule :

$$-\frac{g_M}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x = 0 \Leftrightarrow -\frac{g_M}{2v_0^2\cos^2\alpha}x + \tan\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{g_M}{2v_0^2\cos^2\alpha}x = \tan\alpha = 0 \Leftrightarrow x_{Mars} = \frac{2v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g_M}$$

Sur Terre, on aurait par analogie :

$x_{Terre} = \dfrac{2v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g_T}$ Donc : $\dfrac{x_{Terre}}{x_{Mars}} = \dfrac{g_{Terre}}{g_{Mars}} = 2{,}8$

Le saut martien sera presque trois fois plus long que sur la Terre.

4. Le cœur continuera de fonctionner comme sur la Terre. Le sang éjecté restera plus dans la partie haute du corps, car la pesanteur est moins forte, d'où une suralimentation des parties supérieures.